

## Erinnerung:

**Definition:** Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$ , zu welcher eine lineare Abbildung  $g: W \rightarrow V$  existiert mit  $g \circ f = \text{id}_V$  und  $f \circ g = \text{id}_W$ , heisst ein **Isomorphismus**.

**Satz:** Eine lineare Abbildung  $f$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv ist.

**Definition:** Zwei Vektorräume  $V$  und  $W$  über einem Körper  $K$  heissen **isomorph**, in Symbolen  $V \cong W$ , wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

**Vorsicht:** Gibt es einen Isomorphismus, so gibt es im allgemeinen viele, und möglicherweise keinen besonders ausgezeichneten. Isomorphe Vektorräume darf man also nicht ohne weiteres miteinander identifizieren.

**Satz:** Die Relation  $\cong$  ist eine Äquivalenzrelation. Genauer ist jede Komposition zweier Isomorphismen ein Isomorphismus, die identische Abbildung auf jedem Vektorraum ein Isomorphismus, und die Inverse jedes Isomorphismus ein Isomorphismus.

Bew.:

$\downarrow$   
symmetrisch.

$\downarrow$   
reflexiv.

$\uparrow$  transitiv.  
 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$

$$\begin{aligned} (h \circ f) \circ (f^{-1} \circ h^{-1}) &= h \circ (f \circ f^{-1}) \circ h^{-1} = h \circ \text{id}_V \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = \text{id}_W \\ (f^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f) &= \dots \dots \dots = \text{id}_V \end{aligned}$$

qed.

$f:$   
**Satz:** (a) Jeder Isomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} W$  bildet jede Basis  $B$  von  $V$  bijektiv auf eine Basis von  $W$  ab.  
 (b) Es gilt  $V \cong W$  genau dann, wenn  $\dim(V) = \dim(W)$  ist.

Behauptung  $f$  bijektiv  $\Rightarrow f$  induziert Bijektiv  $B \rightarrow f(B)$

$$\text{Für jedes } w \in W \text{ gilt } w = \sum_{b \in B} x_b \cdot f(b) \iff w = f\left(\sum_b x_b b\right)$$

$$\iff f^{-1}(w) = \sum_b x_b b.$$

(a)  $\Leftarrow$  ebenso  $\Leftarrow$  gilt hingegen eine Wahl der  $x_b$ .

(b) Ist  $f: V \xrightarrow{\sim} W$ , so ist  $\dim(V) = |B| = |f(B)| = \dim(W)$

Sei umgekehrt  $\dim(V) = \dim(W)$ .

Wähle Basen  $\left\{ \begin{array}{l} B \text{ von } V \\ B' \text{ von } W \end{array} \right\}$ , Dann ist  $|B| = \dim(V) = \dim(W) = |B'|$ .

Wähle Bijektiv  $f_0: B \rightarrow B'$ . Setze  $f_0$  fort zu einer lin. Abs.

$$f: V \rightarrow W \text{ durch } f\left(\sum_{b \in B} x_b b\right) := \sum_{b \in B} x_b \cdot f_0(b).$$

Dies ist bijektiv, also ein Isomorphismus.

qed.

## Definition:

- (a) Ein *Homomorphismus* ist eine lineare Abbildung, geschrieben  $V \rightarrow W$ .
- (b) Ein *Monomorphismus* ist eine injektive lineare Abbildung, geschrieben  $V \hookrightarrow W$ .
- (c) Ein *Epimorphismus* ist eine surjektive lineare Abbildung, geschrieben  $V \twoheadrightarrow W$ .
- (d) Ein *Isomorphismus* ist ... (siehe oben) ... , geschrieben  $V \xrightarrow{\sim} W$ .
- (e) Ein *Endomorphismus* von  $V$  ist eine lineare Abbildung  $V \rightarrow V$ .
- (f) Ein *Automorphismus* von  $V$  ist ein Isomorphismus  $V \xrightarrow{\sim} V$ .

**Proposition:** Die Menge  $\text{Aut}(V)$  aller Automorphismen von  $V$  zusammen mit der Komposition  $\circ$  und dem neutralen Element  $\text{id}_V$  ist eine Gruppe, genannt die *Automorphismengruppe von  $V$* .

**Beispiel:** Die Abbildung  $A \mapsto L_A$  induziert eine Bijektion  $\text{GL}_n(K) \rightarrow \text{Aut}(K^n)$ , welche mit der Gruppenoperation auf beiden Seiten verträglich ist, also einen *Gruppen-Isomorphismus*.

$\text{GL}_n = \underline{\text{General linear group}}$ .

## 5.4 Direkte Produkte und Summen

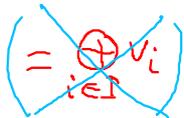
**Definition:** Das kartesische Produkt von  $K$ -Vektorräumen

$$\prod_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid \forall i: v_i \in V_i \} = \prod_{i \in I} V_i$$

versehen mit den Operationen

$$\begin{aligned} (v_i)_i + (v'_i)_i &:= (v_i + v'_i)_i \\ \lambda \cdot (v_i)_i &:= (\lambda v_i)_i \end{aligned}$$

und dem Nullelement  $(0_{V_i})_i$  heisst das *(direkte) Produkt von  $(V_i)_{i \in I}$* . Ihre Teilmenge

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{ (v_i)_{i \in I} \mid \forall i: v_i \in V_i, \text{ fast alle } v_i = 0_{V_i} \}$$


heisst die *äussere direkte Summe von  $(V_i)_{i \in I}$* .

**Konvention:** Sind alle Faktoren gleich, so schreibt man oft  $V^I := \prod_{i \in I} V$  und  $V^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} V$ . Die Elemente von  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ , insbesondere von  $\bigoplus_{i \in I} K$ , schreibt man oft als formale Linearkombinationen  $(v_i)_i = \sum_{i \in I} v_i \cdot X_i$  mit neugewählten Symbolen  $X_i$ .

**Proposition:** Das Produkt  $\prod_{i \in I} V_i$  ist ein  $K$ -Vektorraum und  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  ist ein Unterraum, und für jedes  $j \in I$  sind die folgenden Abbildungen linear:

$$\begin{aligned} \text{proj}_j: \prod_{i \in I} V_i &\rightarrow V_j, \quad (v_i)_i \mapsto v_j \\ \text{incl}_j: V_j &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i, \quad v_j \mapsto \left( \begin{cases} v_j & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \right)_i \end{aligned}$$

**Proposition:** Für beliebige Unterräume  $V_i$  eines Vektorraums  $V$  ist die folgende Abbildung linear:

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \longrightarrow V, \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum'_{i \in I} v_i.$$

**Definition:** Der Vektorraum  $V$  heisst die *innere direkte Summe von  $V_i$  für  $i \in I$* , wenn die obige Abbildung ein Isomorphismus ist, und dann schreiben wir

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = V.$$

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} V_i$$

**Konvention:** Im Fall  $I = \{1, \dots, r\}$  schreiben wir auch

$$\begin{aligned} V_1 \times \dots \times V_r &= \prod_{i=1}^r V_i, \\ V_1 \boxplus \dots \boxplus V_r &= \boxplus_{i=1}^r V_i, \\ V_1 \oplus \dots \oplus V_r &= \bigoplus_{i=1}^r V_i. \end{aligned}$$

Für  $r = 2$  stimmt diese Definition von  $V_1 \oplus V_2$  mit derjenigen in §4.9 überein.

**Konvention:** Oft werden innere und äussere direkte Summe mit demselben Symbol  $\bigoplus$  bezeichnet. Welche dann jeweils gemeint ist, muss man aus dem Zusammenhang erschliessen.

## 5.5 Geordnete Basen

**Definition:** Ein Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren in  $V$  heisst

- (a) linear unabhängig, wenn  $\forall x_1, \dots, x_n \in K: (\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0) \rightarrow (x_1 = \dots = x_n = 0)$ .
- (b) Erzeugendensystem von  $V$ , wenn  $\forall v \in V \exists x_1, \dots, x_n \in K: v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ .
- (c) geordnete Basis von  $V$ , wenn  $\forall v \in V \exists! x_1, \dots, x_n \in K: v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ .

Der Begriff „geordnete Basis“ setzt also voraus, dass der Vektorraum endlich-dimensional ist.

**Proposition:** Ein Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren in  $V$  ist

- (a) linear unabhängig genau dann, wenn  $v_1, \dots, v_n$  paarweise verschieden sind und die Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linear unabhängig ist.
- (b) ein Erzeugendensystem von  $V$  genau dann, wenn die Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist.
- (c) eine geordnete Basis von  $V$  genau dann, wenn  $v_1, \dots, v_n$  paarweise verschieden sind und die Menge  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$  ist.

Bew.: (a) Wäre  $v_j = v_k$  für  $j \neq k$ , setze  $x_i := \begin{cases} 1 & i=j \\ -1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sum x_i v_i = 0$ .

$\Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$  lin. abhängig.

Nest .....

qed.

**Proposition:** Für jedes Tupel  $T := (v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren in  $V$  ist die Abbildung

$$\varphi_T: K^n \rightarrow V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

linear. Sie ist

- (a) injektiv genau dann, wenn  $T$  linear unabhängig ist.
- (b) surjektiv genau dann, wenn  $T$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist.
- (c) ein Isomorphismus genau dann, wenn  $T$  eine geordnete Basis von  $V$  ist.

Bew.

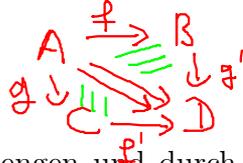
$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &\Rightarrow \varphi_T(x+y) = \varphi_T\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_i (x_i+y_i)v_i \\ &= \sum_i x_i v_i + \sum_i y_i v_i = \varphi_T(x) + \varphi_T(y). \end{aligned}$$

$$\text{Analog } \varphi_T(\lambda x) = \dots = \lambda \cdot \varphi_T(x).$$

$\varphi_T$  injektiv  $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi_T) = \{0\} \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n)$  lin. unabh.

qed

## 5.6 Darstellungsmatrix



kommutativ  $\Leftrightarrow g' \circ f = f' \circ g$

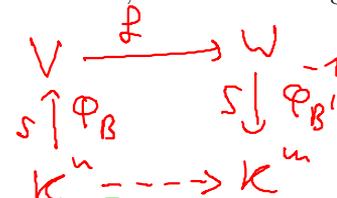
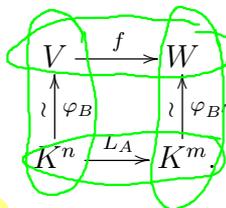
**Definition:** Ein Diagramm aus Mengen und durch Pfeile dargestellte Abbildungen heisst kommutativ, wenn für je zwei Wege in Pfeilrichtung mit demselben Startpunkt und demselben Endpunkt die zusammengesetzten Abbildungen übereinstimmen.



**Bemerkung:** Ein zusammengesetztes Diagramm ist oft genau dann kommutativ, wenn seine Teile kommutativ sind.

*Prop-*

**Definition:** Seien  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis von  $V$  und  $B' = (w_1, \dots, w_m)$  eine geordnete Basis von  $W$ . Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  bezüglich der Basen  $B$  und  $B'$  ist die eindeutig bestimmte  $m \times n$ -Matrix  $A$ , für die  $f \circ \varphi_B = \varphi_{B'} \circ L_A$  gilt, das heisst, für die das folgende Diagramm kommutiert:



Wir bezeichnen diese Matrix  $A$  mit  ${}_{B'}[f]_B$ .

Eine explizite Rechnung mit dem Ansatz  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  liefert für alle  $1 \leq j \leq n$ :

$$f(v_j) = f(\varphi_B(e_j)) = \varphi_{B'}(L_A(e_j)) = \varphi_{B'}(Ae_j) = \varphi_{B'}\left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i.$$