Erinnerung:

Definition: Eine lineare Abbildung $f: V \to W$, zu welcher eine lineare Abbildung $g: W \to V$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_W$, heisst ein *Isomorphismus.*

Satz: Eine lineare Abbildung f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv ist.

Definition: Zwei Vektorräume V und W über einem Körper K heissen *isomorph*, in Symbolen $V \cong W$, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Vorsicht: Gibt es einen Isomorphismus, so gibt es im allgemeinen viele, und möglicherweise keinen besonders ausgezeichneten. Isomorphe Vektorräume darf man also nicht ohne weiteres miteinander identifizieren.

Satz: Die Relation $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation. Genauer ist jede Komposition zweier Isomorphismen ein Isomorphismus, die identische Abbildung auf jedem Vektorraum ein Isomorphismus, und die Inverse jedes Isomorphismus ein Isomorphismus.

Bew.:

symmetrisch

reflexiv.

transitiv.

$$U \xrightarrow[\sim]{f} V \xrightarrow[\sim]{h} W$$

$$(h \circ f) \circ (f^{-1} \circ h^{-1}) = h \circ (f \circ f^{-1}) \circ h^{-1} = h \circ id \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = id$$

$$(f^{-1} \circ h^{-1}) \circ (h \circ f) = \ldots = id$$

qed.

Satz: (a) Jeder Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\sim} W$ bildet jede Basis B von V bijektiv auf eine Basis von W ab.

(b) Es gilt $V \cong W$ genau dann, wenn $\dim(V) = \dim(W)$ ist.

Bew. (a) f bijektiv $\Rightarrow$ f induziert Bijektion $\begin{matrix} B & \longrightarrow & f(B) \\ \cap & & \cap \\ V & & W \end{matrix}$

Für jedes $w \in W$ gilt $w = \sum'_{b\in B} x_b \cdot f(b) \iff w = f\left(\sum'_b x_b b\right)$

$\iff f^{-1}(w) = \sum'_b x_b b.$

(a) $\Longleftarrow$ ebenso $\qquad \Longleftarrow$ gilt für genau eine Wahl der x_b.

(b) Ist $f: V \xrightarrow{\sim} W$, so ist $\dim(V) = |B| = |f(B)| = \dim(W)$.

Sei umgekehrt $\dim(V) = \dim(W)$.

Wähle Basen $\left| \begin{matrix} B \text{ von } V \\ B' \text{ von } W \end{matrix} \right|$. Dann ist $|B| = \dim(V) = \dim(W) = |B'|$.

Wähle Bijektion $f_0: B \to B'$. Setze f_0 fort zu einer lin. Abb.

$f: V \to W$ durch $f\left(\sum'_{b\in B} x_b b\right) := \sum'_{b\in B} x_b \cdot f_0(b)$.

Dies ist bijektiv, also ein Isomorphismus.

qed.

Definition:

(a) Ein *Homomorphismus* ist eine lineare Abbildung, geschrieben $V \to W$.
(b) Ein *Monomorphismus* ist eine injektive lineare Abbildung, geschrieben $V \hookrightarrow W$.
(c) Ein *Epimorphismus* ist eine surjektive lineare Abbildung, geschrieben $V \twoheadrightarrow W$.
(d) Ein *Isomorphismus* ist ... (siehe oben) ... , geschrieben $V \xrightarrow{\sim} W$.
(e) Ein *Endomorphismus von V* ist eine lineare Abbildung $V \to V$.
(f) Ein *Automorphismus von V* ist ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V$.

Proposition: Die Menge $\mathrm{Aut}(V)$ aller Automorphismen von V zusammen mit der Komposition $\circ$ und dem neutralen Element id_V ist eine Gruppe, genannt die *Automorphismengruppe von V.*

Beispiel: Die Abbildung $A \mapsto L_A$ induziert eine Bijektion $\mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{Aut}(K^n)$, welche mit der Gruppenoperation auf beiden Seiten verträglich ist, also einen *Gruppen-Isomorphismus.*

GL_n = General linear group.

5.4 Direkte Produkte und Summen

Definition: Das kartesische Produkt von K-Vektorräumen

$$\bigtimes_{i\in I} V_i := \big\{(v_i)_{i\in I} \bigm| \forall i\colon v_i \in V_i\big\} \qquad = \coprod_{i\in I} V_i$$

versehen mit den Operationen

$$\begin{aligned}(v_i)_i + (v_i')_i &:= (v_i + v_i')_i \\ \lambda\cdot(v_i)_i &:= (\lambda v_i)_i\end{aligned}$$

und dem Nullelement $(0_{V_i})_i$ heisst das *(direkte) Produkt von* $(V_i)_{i\in I}$. Ihre Teilmenge

$$\boxplus_{i\in I} V_i := \big\{(v_i)_{i\in I} \bigm| \forall i\colon v_i \in V_i,\ \text{fast alle } v_i = 0_{V_i}\big\} \qquad \cancel{\left(= \bigoplus_{i\in I} V_i\right)}$$

heisst die *äussere direkte Summe von* $(V_i)_{i\in I}$.

Konvention: Sind alle Faktoren gleich, so schreibt man oft $V^I := \bigtimes_{i\in I} V$ und $V^{(I)} := \boxplus_{i\in I} V$. Die Elemente von $\boxplus_{i\in I} V_i$, insbesondere von $\boxplus_{i\in I} K$, schreibt man oft als formale Linearkombinationen $(v_i)_i = \sum_{i\in I}' v_i \cdot X_i$ mit neugewählten Symbolen X_i.

Proposition: Das Produkt $\bigtimes_{i\in I} V_i$ ist ein K-Vektorraum und $\boxplus_{i\in I} V_i$ ist ein Unterraum, und für jedes $j \in I$ sind die folgenden Abbildungen linear:

$$\mathrm{proj}_j\colon\ \bigtimes_{i\in I} V_i \to V_j,\quad (v_i)_i \mapsto v_j$$

$$\mathrm{incl}_j\colon\ V_j \to \boxplus_{i\in I} V_i,\quad v_j \mapsto \left(\begin{cases} v_j & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}\right)_i$$

Proposition: Für beliebige Unterräume V_i eines Vektorraums V ist die folgende Abbildung linear:

$$\boxplus_{i\in I} V_i \longrightarrow V,\ (v_i)_i \mapsto \sum_{i\in I}{}' v_i.$$

Definition: Der Vektorraum V heisst die *innere direkte Summe von V_i für $i \in I$*, wenn die obige Abbildung ein Isomorphismus ist, und dann schreiben wir

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \;=\; V.$$

$$\boxplus_{i\in I} V_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} V_i$$

Konvention: Im Fall $I = \{1, \ldots, r\}$ schreiben wir auch

$$\begin{aligned} V_1 \times \ldots \times V_r &= \textstyle\bigtimes_{i=1}^{r} V_i, \\ V_1 \boxplus \ldots \boxplus V_r &= \textstyle\boxplus_{i=1}^{r} V_i, \\ V_1 \oplus \ldots \oplus V_r &= \textstyle\bigoplus_{i=1}^{r} V_i. \end{aligned}$$

Für $r = 2$ stimmt diese Definition von $V_1 \oplus V_2$ mit derjenigen in §4.9 überein.

Konvention: Oft werden innere und äussere direkte Summe mit demselben Symbol $\bigoplus$ bezeichnet. Welche dann jeweils gemeint ist, muss man aus dem Zusammenhang erschliessen.

5.5 Geordnete Basen

Definition: Ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V heisst

(a) *linear unabhängig,* wenn $\forall x_1, \ldots, x_n \in K\colon \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0\right) \to \left(x_1 = \ldots = x_n = 0\right)$.

(b) *Erzeugendensystem von V*, wenn $\forall v \in V\ \exists x_1, \ldots, x_n \in K\colon\ v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

(c) *geordnete Basis von V*, wenn $\forall v \in V\ \exists!\, x_1, \ldots, x_n \in K\colon\ v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Der Begriff „geordnete Basis“ setzt also voraus, dass der Vektorraum endlich-dimensional ist.

Proposition: Ein Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V ist

(a) linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind und die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist.

(b) ein Erzeugendensystem von V genau dann, wenn die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

(c) eine geordnete Basis von V genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ paarweise verschieden sind und die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Bew.: (a) Wäre $v_j = v_k$ für $j \neq k$, setze $x_i := \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \sum x_i v_i = 0$.

$\Rightarrow (v_1, .., v_n)$ lin. abhängig.

Rest ....

qed

Proposition: Für jedes Tupel $T := (v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V ist die Abbildung

$$\boxed{\varphi_T \colon K^n \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i}$$

linear. Sie ist

(a) injektiv genau dann, wenn T linear unabhängig ist.

(b) surjektiv genau dann, wenn T ein Erzeugendensystem von V ist.

(c) ein Isomorphismus genau dann, wenn T eine geordnete Basis von V ist.

Bew.:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_T(x+y) = \varphi_T\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_i (x_i+y_i)v_i$$

$$= \sum_i x_i v_i + \sum_i y_i v_i = \varphi_T(x) + \varphi_T(y).$$

Analog $\varphi_T(\lambda x) = \ldots = \lambda \cdot \varphi_T(x)$.

φ_T injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\varphi_T) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $(v_1, .., v_n)$ lin. unabh.

qed.

5.6 Darstellungsmatrix

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

kommutativ $\iff g' \circ f = f' \circ g$

Definition: Ein Diagramm aus Mengen und durch Pfeile dargestellte Abbildungen heisst *kommutativ*, wenn für je zwei Wege in Pfeilrichtung mit demselben Startpunkt und demselben Endpunkt die zusammengesetzten Abbildungen übereinstimmen.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Ein zusammengesetztes Diagramm ist oft genau dann kommutativ, wenn seine Teile kommutativ sind.

Prop.

Definition: Seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ eine geordnete Basis von W. Die *Darstellungsmatrix* einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ *bezüglich der Basen* B *und* B' ist die eindeutig bestimmte $m \times n$-Matrix A, für die $f \circ \varphi_B = \varphi_{B'} \circ L_A$ gilt, das heisst, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, "L_A"] & K^m . \arrow[u, "\varphi_{B'}", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\varphi_{B'}^{-1}", "\wr"'] \\ K^n \arrow[u, "\varphi_B", "\wr"'] \arrow[r, dashed] & K^m \end{tikzcd}$$

$$\boxed{L_A = \varphi_{B'}^{-1} \circ f \circ \varphi_B .}$$

Wir bezeichnen diese Matrix A mit ${}_{B'}[f]_B$.

Eine explizite Rechnung mit dem Ansatz $\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}}$ liefert für alle $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$f(v_j) = f(\varphi_B(e_j)) = \varphi_{B'}(L_A(e_j)) = \varphi_{B'}(Ae_j) = \varphi_{B'}\left(\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}\right) = \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i .}$$